Ueber

# primäre Trägheitsmomente

## linearer ebener Gebilde.

---

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

**Erlangung der Doctorwürde**

der

hohen philosophischen Fakultät zu Marburg

vorgelegt von

Rud. Schreiber,
aus St. Goarshausen.

---

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei. (R. Friedrich).
1883.

Ueber

# primäre Trägheitsmomente

linearer ebener Gebilde.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät zu Marburg

vorgelegt von

Emil Schmidt,

aus Berlin.

Marburg.

Universitäts-Buchdruckerei von R. Friedrich

1883.

Wenn auch in den grösseren Lehrbüchern der Mechanik die Trägheitsmomente der Flächen und Körper in der Regel mit hinlänglicher Ausführlichkeit behandelt werden, finden doch die Trägheitsmomente der Linien selten einige Berücksichtigung. Immerhin hat es Werth, wenn zunächst auch nur theoretischen, Untersuchungen über die Trägheitsmomente linearer Gebilde anzustellen und Formeln dafür zu entwickeln, da hierbei, wie bei fast allen derartigen Untersuchungen, entweder neue Gesetze gefunden werden, oder doch schon bekannte Wahrheiten in anderer Form zu Tage treten.

Das Trägheitsmoment eines Systemes materieller Punkte $m_1, m_2, m_3, \ldots$, die von der Umdrehungsaxe die Abstände $r_1, r_2, r_3, \ldots$ besitzen, ist:

$$T = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots = \Sigma m r^2$$

Wenn diese Summirung nicht in elementarer Weise geschehen kann, wie dies bei allen Körpern der Fall ist, deren Elemente sich continuirlich an einander schliessen, dann erhält man das Integral:

$$T = \int r^2 \, dm,$$

worin $r$ eine von der Gestalt des Körpers abhängige Variable ist, $dm$ aber das Differential der Masse bezeichnet. Setzt man das betreffende Gebilde als homogen von der Dichtigkeit $k$ voraus, so folgt: $dm = k.ds$ und

$$1) \ldots T = k \int_0^s r^2 \, ds,$$

wo $ds$ die bekannte Bezeichnung des Bogendifferentials ist.

Da in der vorliegenden Arbeit ausschliesslich die Trägheitsmomente linearer planimetrischer Gebilde in Bezug auf eine im Schwerpunkte derselben zur Ebene des Gebildes senkrechte Axe behandelt werden, so wollen wir dieselben der kürzeren Ausdrucksweise halber als primäre Trägheitsmomente bezeichnen.

Ist $T_1$ das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige zur primären Axe parallele Axe und $u$ der Abstand beider Axen, $m$ die Masse des betr. Gebildes, so erhalten wir das primäre Trägheitsmoment durch die Gleichung:

$$2) \ldots T = T_1 - mu^2.$$

Ebenso erhalten wir das primäre Trägheitsmoment zweier Gebilde, die wir als unveränderliches System betrachten, gegeben durch die Gleichung:

$$3) \ldots T = t + t_1 + \frac{m m_1 v^2}{m + m_1},$$

wenn $m$ und $m_1$ die Massen, $t$ und $t_1$ die primären Trägheitsmomente darstellen und $v$ der Abstand ihrer Schwerpunkte ist.

In engster Beziehung zum Trägheitsmoment steht der Trägheitsradius d. h. der Radius des Kreises, in dessen Umfang die Masse $M$ angebracht dasselbe Trägheitsmoment haben würde wie die im Raum vertheilte Masse $M$.

Derselbe ist bestimmt durch:

$$\varrho^2 = \frac{\int r^2 \, dm}{\int dm} = \frac{T}{M}.$$

# Primäre Trägheitsmomente geradliniger, ebener Figuren.

## §. 1.

### *Die Gerade.*

Für die Gerade erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung 1.)

$$T = k \int x^2 \, dx$$

und wenn die Länge der Geraden $= a$ ist, so folgt das primäre Trägheitsmoment:

$$T = k \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 \cdot dx = \frac{k\,a^3}{12}.$$

Dasselbe wird unter Berücksichtigung von:

$$k \cdot a = m$$

auch durch die Gleichung:

$$T = \frac{m\,a^2}{12}$$

dargestellt. Eine Doppellinie von der Länge $a$ und der Masse $2m$ hätte folglich ein primäres Trägheitsmoment:

$$T = \frac{ma^3}{6} = \frac{k\,a^3}{6}$$

d. h. das Doppelte von dem der einfachen Geraden. In beiden Fällen ist aber:

$$\varrho = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{3}.$$

## §. 2.

### *Zwei einander schneidende Geraden.*

(Winkel).

Nach Gleichung 3.) der Einleitung erhalten wir das primäre Trägheitsmoment des Winkels $\gamma$. (Fig. 1.), dessen Schenkel die begrenzten Geraden $a$ und $b$ sind:

$$T = k \cdot \left( \frac{a^3 + b^3}{12} + \frac{a b x^2}{4(a+b)} \right),$$

wenn $x$ den Abstand der Schwerpunkte der beiden Schenkel bezeichnet. Wird noch $x = \frac{c}{2}$ durch $a$, $b$, $\gamma$ bestimmt, so folgt:

$$T = k \cdot \frac{a^4 + 4a^3 b - 6a^2 b^2 \cos\gamma + 4ab^3 + b^4}{12(a+b)}.$$

Setzen wir $\gamma = 0$ und $a = b$, so geht der Winkel $ACB$ in eine Doppellinie von der Länge $a$ über und dem entsprechend wird durch Substitution von $a = b$ und $\cos\gamma = 1$ aus vorstehender Gleichung:

$$T = \frac{k \cdot a^3}{6}.$$

Ferner geht der Winkel $ACB$ für $\gamma = \pi$ in einen gestreckten über, d. h. in eine Gerade von der Länge $a + b$; aus obiger Gleichung wird, wie zu erwarten stand, für $\cos\gamma = -1$ erhalten:

$$T = \frac{k}{12} \cdot (a+b)^3.$$

Der Trägheitsradius ist:

$$\varrho = \frac{\sqrt{a^4 + 4a^3 b - 6a^2 b^2 \cos\gamma + 4ab^3 + b^4}}{6(a+b)} \cdot \sqrt{3}$$

und geht für $\gamma = 0$, $a = b$ über in:

$$\varrho = \frac{a}{6}\sqrt{3};$$

für $\gamma = \pi$ dagegen ist:

$$\varrho = \frac{a+b}{6}\sqrt{3}.$$

## §. 3.

## *Das Dreieck.*

Das primäre Trägheitsmoment des Dreiecks setzt sich aus dem soeben gewonnenen und demjenigen der dritten Seite

nach Gl. 3.) der Einleitung zusammen. Wenn (Fig. 2.) die Seiten des Dreiecks $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ sind und $P$ der Schwerpunkt des Systemes $(a, b)$, $Q$ derjenige der dritten Seite ist, so folgt der Abstand dieser beiden Schwerpunkte:

$$\overline{QP}^2 = \frac{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}{4(a+b)^2}.$$

und unter Weglassung aller Zwischenrechnungen:

$$T = k\,\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{12}.$$

Will man das Trägheitsmoment in trigonometrischer Form haben, so wird dies leicht durch die Substitution:

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\,;\quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

erreicht. Hiernach ist:

$$T = k.\,\frac{a^3(\sin\alpha^3+\sin\beta^3+\sin\gamma^3+3\sin\alpha.\sin\beta\sin\gamma)}{12.\sin\alpha^3}.$$

Da sich das primäre Trägheitsmoment eines diesem Dreieck ähnlichen Dreiecks nur durch den Faktor $a_1^3$ unterscheiden kann, so erblicken wir hierin einen speciellen Fall des allgemeinen Satzes:

Die Trägheitsmomente ähnlicher linearer Gebilde verhalten sich wie die 3. Potenzen homologer Linien.

Bezeichnen wir mit $T_k$ das primäre Trägheitsmoment eines linearen Gebildes von der Dichtigkeit $k$ und mit $T_{1k}$ dasjenige eines demselben ähnlichen von gleicher Dichtigkeit, so ist nach dem Vorstehenden, wenn $a$ und $a_1$ homologe Linien sind,

$$1.)\ \ldots\ T_k : T_{1k} = a^3 : a_1^3.$$

Ferner sei $T_1\lambda$ das primäre Trägheitsmoment eines dem zweiten Gebilde congruenten von der Dichtigkeit $\lambda$, dann ist:

$$2.)\ \ldots\ T_{1k} : T_1\lambda = k : \lambda,$$

woraus leicht folgt:

$$3.) \ldots T_k : T_1\lambda = k\,a^3 : \lambda\,a_1^3$$

oder mit Worten:

Die primären Trägheitsmomente zweier ähnlicher linearer Gebilde von verschiedener Dichtikeit verhalten sich wie die Produkte der Dichtigkeits-Faktoren in die 3. Potenzen homologer Linien.

Indem wir zu den allgemeinen Formeln des Dreiecks zurückkehren, bemerken wir kurz, dass hieraus, falls wir durch zusammenfallen der Seiten die Fläche des Dreiecks $= 0$ werden lassen, sehr leicht wieder die primären Trägheitsmomente der Doppellinien von der Länge $c$ resp. $a+b$ erhalten werden. Für specielle Fälle gestalten sich selbstredend auch die Formeln einfacher, so für ein:

1.) gleichseitiges Dreieck:

$$T = \frac{k \,.\, a^3}{2};$$

2.) gleichschenkl. rechtwinkl. Dreieck:

$$\left.\begin{aligned} T &= k \,.\, \frac{a^3\,(2+5\sqrt{2})}{12} \\ T &= k \,.\, \frac{c^3}{24}\,(5+\sqrt{2}) \end{aligned}\right\} c^2 = 2\,a^2.$$

Die entsprechenden trigonometrischen Formeln ergeben ebenfalls einfachere Gleichungen.

Der Trägheitsradius des Dreiecks ist:

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3+3\,a\,b\,c}{3\,(a+b+c)}}$$

und:

$$\varrho = \frac{a}{2\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin\alpha^3+\sin\beta^3+\sin\gamma^3+3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{3\,.\,(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}}.$$

## §. 4.

## *Das Parallelogramm.*

Wir gehen auch hier von Gleichung 3.) der Einleitung aus und erhalten sowohl für ein Rechteck wie für ein schiefwinkliges Parallelogramm genau denselben Werth:

$$T = \frac{k}{6}(a+b)^3,$$

wo $a$ und $b$ die Seiten des Parallelogramms sind. Hieraus ziehen wir den Schluss, dass das primäre Trägheitsmoment des Umfangs der Parallelogramme von den Winkeln unabhängig ist. Da ferner die Gleichung:

$$T = \frac{k}{6}\cdot(a+b)^3$$

nicht die Seiten einzeln, sondern nur ihre Summe enthält, folgt weiter:

Die primären Trägheitsmomente isoperimetrischer Parallelogramme sind einander gleich.

Setzen wir die eine Seite gleich $x$ und den halben Umfang gleich $u$, so ist die andere Seite $u-x$ und $T = \frac{k}{6}\left[x+(u-x)\right]^3$. Bezeichnen wir noch den von $x$ und $u-x$ eingeschlossenen Winkel durch $\varphi$, so können beide vorstehende Sätze dahin zusammengefasst werden:

Das primäre Trägheitsmoment eines Parallelogramms von den Seiten $x$ und $u-x$ und dem Winkel $\varphi$ resp. $\pi-\varphi$ wird nicht geändert, wenn $x$ die Werthe von 0 bis $u$ und $\varphi$ die Werthe 0 bis $\pi$ durchläuft.

Auch in den Grenzfällen $x=0$ und $x=u$ sowie $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ gilt immer noch der vorstehende Satz, wie sich leicht ergiebt, wenn wir diese Werthe in die Gleichung:

$$T = \frac{k}{6}\left(x+(u-x)\right)^3$$

substituiren. Für $\varphi = 0$ erhalten wir z. B. eine Doppellinie von der Länge $u$, was wieder mit unserer Formel:

$$T = \frac{k}{6} u^3$$

übereinstimmt.

Für $x = \frac{1}{2} u$ folgt:

$$T = \frac{k}{6} (2x)^3 = \frac{4k}{3} x^3$$

als primäres Trägheitsmoment eines Quadrats von der Seite $x$.

Der Trägheitsradius des Parallelogramms ist:

$$\varrho = \frac{a+b}{6} \sqrt{3}.$$

## §. 5.

## *Das Polygon.*

Offenbar muss das primäre Trägheitsmoment eines regulären Polygons von $n$ Seiten $n$ mal so gross sein als das auf den Mittelpunkt bezogene Trägheitsmoment einer Polygonseite. Es sei (Fig. 3.) $C$ der Mittelpunkt und $DE$ eine Polygonseite; wir legen unser rechtwinkliges Coordinatensystem so, dass $DE$ in die Axe der $x$, $FC$ in die Axe der $y$ fällt. Das Trägheitsmoment eines beliebigen Punktes $G$ in der Axe der $x$ in Bezug auf eine im Punkte $C$ zur Ebene des Polygons senkrechte Axe ist:

$$dT = k \cdot \overline{CG}^2 \cdot dx = k \cdot (x^2 + r^2)\, dx,$$

wenn $r$ der Radius des eingeschriebenen Kreises ist. Für die Seite $a$ folgt:

$$T = k \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} (r^2 + x^2)\, dx = k \left( \frac{a^3}{12} + ar^2 \right).$$

Das primäre Trägheitsmoment des Polygons ist zufolge der vorstehenden Bemerkung:

$$T = k.na\left(r^2 + \frac{a^2}{12}\right).$$

Ist $DE = a$ die Seite des Polygons, so beträgt der Winkel $DCF = \alpha = \frac{\pi}{n}$ und es ist:

$$r^2 = \frac{a^2}{4}\, ctg^2 \frac{\pi}{n},$$

so dass $T$ auch durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$T = \frac{kna^3}{12} \cdot \left(1 + 3ctg^2 . \frac{\pi}{n}\right).$$

Auf ein Quadrat von der Seite $a$ angewandt erhalten wir wegen $ctg \frac{\pi}{4} = 1$:

$$T = \frac{4}{3} k a^3$$

wie schon oben beim Parallelogramm gefunden wurde. Für ein Sechseck folgt aus Gleichung $T = kna\left(r^2 + \frac{a^2}{12}\right)$ wegen $r^2 = \frac{3}{4}a^2$:

$$T = 5 k a^3.$$

Endlich kann auch das primäre Trägheitsmoment des Kreises aus der Formel für das Polygon hergeleitet werden. Nimmt $n$ fortwährend zu, $a$ dagegen ab, so wird im Grenzfall das Polygon in einen Kreis übergehen. Setzen wir daher:

$$n = \infty \quad ; \quad a = 0,$$

so folgt:

$$T = k.0.\infty\left(r^2 + \frac{0}{12}\right) = k.0 \infty r^2.$$

Der im allgemeinen unbestimmte Ausdruck $0.\infty$ nimmt hier einen ganz bestimmten Werth an, denn $n.a$ ist der Umfang des Polygons, der für obige Grenzwerthe in die Peripherie des Kreises übergeht. Hieraus folgt:

$$T = k\, 2\pi r . r^2 = 2 k \pi r^3$$

eine Formel, welche sogleich direkt hergeleitet werden soll.

Der Trägheitsradius ist durch die Gleichungen:

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12\,r^2 + a^2}{3}} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1 + 3\,ctg^2\frac{\pi}{n}}{3}}$$

bestimmt, die für

1) ein Quadrat:

$$\varrho = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$

2) Sechseck

$$\varrho = a\sqrt{\frac{5}{6}},$$

3) einen Kreis

$$\varrho = r$$

ergeben.

---

## Die primären Trägheitsmomente der Kegelschnitte.

### §. 6.

### *Der Kreis.*

Der Kreis sei durch seine Mittelpunkts-Gleichung gegeben. Durch eine einfache Ueberlegung findet man leicht, dass das primäre Trägheitsmoment des Kreises gleich dem 4fachen Trägheitsmoment des I. Quadranten in Bezug auf eine im Mittelpunkt des Kreises zur Ebene desselben senkrechte Axe ist.

Aus der Gleichung:

$$T = k\int r^2\,ds$$

folgt sofort, da im vorliegenden Falle $r^2$ constant $= a^2$ ist:

$$T = k\,a^2\int ds$$

und unter Berücksichtigung der Gl:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ist für den I. Quadranten·

$$T = ka^3 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ka^3 \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a$$

$$T = k, \frac{\pi}{2} . a^3.$$

Das primäre Trägheitsmoment des ganzen Kreises ist daher:

$$T = 2k\pi a^3.$$

Der Trägheitsradius $\varrho$ ist für einen Kreis:

$$\varrho^2 = \frac{2\pi k a^3}{2\pi k a} = a^2; \quad \varrho = a,$$

was nach der in der Einleitung gegebenen Definition des Trägheitsradius erwartet werden musste.

In gleicher Weise wie für die ganze Kreisperipherie kann auch für den Halbkreis leicht das primäre Trägheitsmoment entwickelt werden. Der Schwerpunkt des Halbkreises muss offenbar auf dem denselben halbirenden Radius liegen, und zwar ist, wie bekannt, der Abstand $OP$ (Fig. 4.) des Schwerpunktes $P$ von dem Mittelpunktr $O$ gleich $\frac{2a}{\pi}$. Das primäre Trägheitsmoment wird daher:

$$T = k \int_{-a}^{+a} u^2 . ds.$$

Nun wird $u^2$ und $ds$ aus den Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ und } u^2 = x^2 + \left(y - \frac{2a}{\pi}\right)^2$$

erhalten, sodass

$$T = k \int_{-a}^{+a} \left[x^2 + \left(y - \frac{2a}{\pi}\right)^2\right] \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

wird. Durch Eliminiren von $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ folgt:

$$T=\frac{k a^3}{\pi^2}(\pi^2+4)\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{4 k a^2}{\pi}\int_{-a}^{+a}dx$$

$$T=\frac{k a^3}{\pi}.(\pi^2-4).$$

Wenn man die primären Trägheitsmomente zweier Halbkreise nach den schon öfters angewandten Formeln combinirt, kann das primäre Trägheitsmoment des ganzen Kreises wieder erhalten werden. Ebenso ist leicht das primäre Trägheitmoment eines Halbkreises mit zugehörigem Durchmesser als:

$$T=k\,\frac{a^3\,(3\,\pi^2-8\,\pi-8)}{3(\pi+2)}$$

herzuleiten.

## §. 7.

## *Die Ellipse.*

Wir lassen hier wie auch beim Kreis den Mittelpunkt resp. Schwerpunkt der Ellipse mit dem Coordinaten-Anfang zusammenfallen und bestimmen wie im vorigen §. das Trägheitsmoment des ersten Quadranten in Bezug auf die primäre Axe der ganzen Ellipse. (Des kürzeren Ausdrucks halber führen wir die leicht verständliche Bezeichnung primäre Axe ein).

In das allgemeine Integral:

$$T=k\int r^2\,d\,s$$

ist für $r^2$ zu setzen $x^2+y^2$, wodurch erhalten wird:

$$T=k\int(x^2+y^2)\,ds=k\int(x^2+y^2)\,\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.dx.$$

Nach Substitution von $y^2$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ und der Grenzen 0 und $a$ erhält man:

$$1)\quad T=k\cdot\int_0^a\left[x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\right]\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\cdot dx.$$

Durch Einführung der numerischen Excentricität $\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ erscheint nach Vereinfachung $T$ unter der Form:

$$T=k\left[b^2\int_0^a\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}\cdot dx+\varepsilon^2\int_0^a x^2\cdot\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}\cdot dx\right]$$

und in abkürzender Bezeichnung:

$$2)\quad T=k\left[b^2J_1+\varepsilon^2J_2\right].$$

Da $\frac{x}{a}$ immer ein ächter Bruch ist, so kann man einen Hilfswinkel $\varphi$ einführen, der durch die Gleichung:

$$\frac{x}{a}=\cos\varphi \text{ oder } x=a\cos\varphi$$

bestimmt ist. Hierdurch gehen die beiden Integrale über in:

$$3.)\quad\begin{cases}J_1=-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\cdot d\varphi\\ J_2=-a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\varphi\,\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\cdot d\varphi\end{cases}$$

und da die Excentricität der Ellipse kleiner als »1.« ist, kann $J_1$ in folgende Reihe entwickelt werden:

$$J_1=-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{4}\cdot\cos^4\varphi-\frac{1.2\varepsilon^6}{2.4.6}\cos^6\varphi-\ldots\right]d\varphi$$

$$4.)\quad J_1=-a\left\{A_0-\frac{\varepsilon^2}{2}A_2-\frac{1.\varepsilon^4A_4}{2.4}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\varepsilon^6}{6}A_6-\ldots\right\}_{\frac{\pi}{2}}^{0},$$

wo die Coefficienten $A_0$, $A_2$, $A_4$, $A_6$ . . . den Potenzen von $\cos\varphi$ entsprechen und folgende Werthe haben:

$$A_0 = \varphi$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(\sin\varphi . \cos\varphi + \varphi)$$

$$A_4 = \frac{1}{4}\sin\varphi . \cos^3\varphi + \frac{1.3}{2.4}(\sin\varphi . \cos\varphi + \varphi)$$

$$A^6 = \frac{1}{6}\sin\varphi\cos^5\varphi + \frac{5}{4.6}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3.5}{4.6}(\sin\varphi . \cos\varphi + \varphi)$$

$$A_8 = \ldots$$

Für die obere Grenze werden sämmtliche Coefficienten $=0$, folglich auch $J_1=0$, für die untere dagegen gehen die Coefficienten $A_0$, $A_2$, $A_4$, $A_6$ . . . über in:

$$B_0 = \frac{\pi}{2} \qquad B_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$B_4 = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad B_6 = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$B_8 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad B_{10} = \ldots$$

Das bestimmte Integral $J_1$ wird in Folge dessen:

$$4^{\alpha}) \quad J_1 = a\left\{A_0 - \frac{\varepsilon^2}{2}B_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^4}{4}B_4 - \frac{1.3}{2.4}\frac{\varepsilon^6}{6}B_6 \ldots\right\}$$

Das zweite Integral wird ganz analog entwickelt in die Reihe:

$$J_2 = -a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\cos^2\varphi - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^4\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^4}{4}\cos^6\varphi - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\varepsilon^6}{6}\cdot\cos^8\varphi - \ldots\right)d\varphi,$$

woraus durch Integration zunächst das allgemeine Integral mit den Coefficienten $A_2$, $A_4$, $A_6$, $A_8$, $A_{10}$, ... und durch Einführen der Grenzen das bestimmte Integral mit den Coefficienten $B_2$, $B_4$, $B_6$, $B_8$ . . . folgt.

$$4^{3}) \quad J_2 = a^3 \left\{ B_2 - \frac{\varepsilon^2}{2} B_4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^4}{4} B_6 - \frac{1.3}{2.4} \frac{\varepsilon^6}{6} B_8 \ldots \right\}.$$

Das primäre Trägheitsmoment der ganzen Ellipse,

$$T = 4k \left\{ b^2 J_1 + \varepsilon^2 J_2 \right\},$$

wird daher:

$$(5) \ldots \quad T = 4ka \left\{ \begin{array}{l} b^2 \left[ B_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} B_2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^4}{4} . B_4 - \frac{1.3}{2.4} \frac{\varepsilon^6}{6} B_6 - \ldots \right] \\ + a^2 \left[ \varepsilon^2 B_2 - \frac{\varepsilon^4}{2} B_4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^6}{4} B_6 - \frac{1.3}{2.4} \frac{\varepsilon^8}{6} B_8 - \ldots \right] \end{array} \right\};$$

und wenn wir die in Klammer stehenden Reihen:

$$B_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} B_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^4}{4} B_4 - \ldots \text{ mit } N_1,$$

$$\varepsilon^2 B_2 - \frac{\varepsilon^4}{2} . B_4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^6}{4} B_6 - \ldots \text{ mit } M_1$$

bezeichnen, ist:

$$6) \ldots \quad T = 4ka \left\{ a^2 M_1 + b^2 N_1 \right\}.$$

Ein specieller Fall der Ellipse ist der Kreis; folglich muss das primäre Trägheitsmoment des Kreises auch in dem der Ellipse enthalten sein. In der That wird für $\varepsilon = 0$ aus Gleichung 5.)

$$T = 4k\, a\, .\, b^2 . \frac{\pi}{2} = 2\pi k\, a^3$$

erhalten.

Um endlich den Trägheitsradius zu bestimmen, müssen wir das soeben gewonnene Trägheitsmoment durch den Umfang der Ellipse dividiren. Der ganze Umfang ist:

$$U = 4ka \left( B_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} . B_2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^4}{4} B_4 - \frac{1.3}{2.4} \frac{\varepsilon^6}{6} B_6 - \ldots \right).$$

Daher wird zufolge der Gleichung $\varrho^2 = \frac{T}{M}$.

$$7) \ldots \varrho^2 = a^2 \frac{\varepsilon^2 B_2 - \frac{\varepsilon^4}{2} B_4 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^6}{4} B_6 - \frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^8 B_8 \ldots}{B_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} B_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^4}{4} B_4 - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\varepsilon^6}{6} B_6 \ldots} + b^2.$$

$$8) \ldots \varrho^2 = a^2 . Q_1 + b^2.$$

## §. 8.

## *Die Parabel.*

Da bei der Parabel nicht wie bei der Ellipse Schwerpunkt, Mittelpunkt und Coordinatenanfang zusammenfallen, so müssen wir ähnlich wie beim Halbkreis verfahren. Die Schwerpunktscoordinaten sind für ein beliebiges Bogenstück:

$$X = \frac{\frac{1}{2}\left(x + \frac{p}{4}\right)\sqrt{x^2 + \frac{px}{2}} - \frac{p^2}{16} l\left[\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p + 2x}}{\sqrt{p}}\right]}{\sqrt{x^2 + \frac{px}{2}} + \frac{p}{2} l\left[\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p + 2x}}{\sqrt{p}}\right]}$$

$$Y = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{p}\left(p + 2x\right)^{3/2} - \frac{1}{3}p^2}{\sqrt{x^2 + \frac{px}{2}} + \frac{p}{2} l\left[\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p + 2x}}{\sqrt{p}}\right]},$$

wenn die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

ist.

Unter der Voraussetzung, dass der betreffende Parabelbogen sich bis zur Brennpunktsordinate erstreckt und die Axe der $x$ denselben halbirt, muss der Schwerpunkt auf dieser Axe selbst liegen; daher:

$$Y = 0;$$

ferner erhalten wir durch Einführen von $x = \frac{p}{2}$ als Schwerpunktsabscisse:

$$\xi = \frac{3}{8} \cdot p \frac{\sqrt{2} - l(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2} + l(1+\sqrt{2})}.$$

Es sei nun (Fig. 5) $F$ der Brennpunkt, $S$ der Scheitel und $P$ der Schwerpunkt der Parabel, so ist $SP = \xi$. Unter Anwendung der allgemeinen Formel:

$$T = k \int r^2 \, ds$$

folgt hier wegen:

$$r^2 = \overline{MP}^2 = (x - \xi)^2 + y^2,$$

$$T = k \cdot \int \left[ (x - \xi)^2 + 2px \right] ds$$

und nach Einführen von $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$ und der Grenzen 0 und $\frac{p}{2}$:

$$T = k \int_0^{\frac{p}{2}} \left\{ 2x^3 + (5p - 4\xi)x^2 + 2(p^2 - p\xi + \xi^2)x + p\xi^2 \right\} \frac{dx}{\sqrt{2px + 4x^2}}$$

Als obere Grenze ist $\frac{p}{2}$ zu nehmen, weil nur in diesem Falle das Trägheitsmoment ein primäres wird. Durch Zerlegen und allmälige Integration nach der Formel:

$$\int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{bx + cx^2}} = \frac{x^{m-1}}{m \cdot c} \sqrt{bx + cx^2} - \frac{(2m-1)\, b}{2m \cdot c} \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{bx + cx^2}} \cdot dx$$

folgt schliesslich:

$$T = k \left\{ \left( \frac{x^2}{6} + \frac{(25p - 24\xi)x}{48} + \frac{7p^2 - 8p\xi + 32\xi^2}{64} \right) \sqrt{2px + 4x^2} \right.$$
$$\left. - \frac{(7p^3 - 8p^2 - 32p\xi^2)}{128} l \left( 2p + 8x + 4\sqrt{2px + 4x^2} \right) \right\}_0^{\frac{p}{2}}$$

und hieraus durch Multiplication mit 2 das primäre Trägheitsmoment eines sich oberhalb und unterhalb der Axe der X bis zum Parameter erstreckenden Parabelbogens:

$$T=\frac{kp}{32}\cdot\left[\frac{(79p^2-72p\xi+96\xi^2)\sqrt{2}}{3}-\frac{(7p^2-8p\xi-32\xi^2)}{2}l(3+2\sqrt{2})\right].$$

Bevor wir jedoch noch den Werth von $\xi$ substituiren, bringen wir denselben auf die Form:

$$\xi=\frac{3}{8}p\,.\,A,$$

wo:

$$A=\frac{\sqrt{2}-l(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+l(1+\sqrt{2})}$$

ist.

Hierdurch wird:

$$T=\frac{kp^3}{32}\cdot\left[\left(\frac{79}{3}-9A+\frac{9}{2}A^2\right)\sqrt{2}-\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}A-\frac{9}{4}A^2\right)l(3+2\sqrt{2})\right]$$

$$\varrho^2=\frac{p^2}{16}\left[\frac{\left(\frac{79}{3}-9A+\frac{9}{2}A^2\right)\sqrt{2}-\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}A-\frac{9}{4}A^2\right)l(3+2\sqrt{2})}{\sqrt{2}+l(1+\sqrt{2})}\right]$$

## §. 9.

## *Die Hyperbel.*

Wir setzen voraus, dass die Axen der Hyperbel mit denen unseres rechtwinkligen Coordinatensystems zusammenfallen und in Folge dessen der Coordinaten-Anfang zugleich Mittelpunkt und Schwerpunkt sei. Alsdann erhalten wir, nachdem auch die Excentricität gemäss der Gleichung:

$$a^2+b^2=a^2\varepsilon^2$$

eingeführt ist, als Trägheitsmoment des I. Quadranten in Bezug auf die primäre Axe der Hyperbel (Coordinaten-Anfang):

$$1)\ \ldots\ T=k\int(\varepsilon^2x^2-b^2)\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}\,.\,dx$$

$$2)\ \ldots\ T=k\left\{-b^2J_1+\varepsilon^2J_2\right\}$$

Die beiden Integrale mit den Grenzen $a$ und $x$

$$3) \ldots \begin{cases} J_1 = \int_a^x \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\, dx \\ J_2 = \int_a^x x^2 \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x - a^2}{x^2 - a^2}}\, dx \end{cases}$$

gehen durch die Substitution:

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \text{ woraus } dx = \frac{a \sin\varphi}{\cos\varphi^2} d\varphi,$$

über in:

$$J_1 = a\varepsilon \int_0^{\arccos\frac{a}{x}} \frac{dx}{\cos^2\varphi} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos\varphi}{\varepsilon}\right)^2}$$

$$J_2 = a^3\varepsilon \int_0^{\arccos\frac{a}{x}} \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos\varphi}{\varepsilon}\right)^2}.$$

In Anbetracht, dass hier $\varepsilon > 1$, kann wieder eine Reihenentwicklung mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes stattfinden.

$$J_1 = a\varepsilon \int_0^{\arccos\frac{a}{x}} \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{\cos^2\varphi}{2.4\varepsilon^4} - \frac{1.3\cos^4\varphi}{2.4.6\varepsilon^6} \ldots\right) d\varphi$$

$$J_2 = a^3\varepsilon \int_0^{\arccos\frac{a}{x}} \left(\frac{1}{\cos^4\varphi} - \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon^2\cos^2\varphi} - \frac{1}{2.4.\varepsilon^4} - \frac{1.3}{2.4.6}\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{\cos^4\varphi}{\varepsilon^8} \ldots\right) d\varphi$$

woraus durch Integration:

$$\ldots \begin{cases} J_1 = a\varepsilon \left\{ A_{(-2)} - \frac{A_0}{2\varepsilon^2} - \frac{A_2}{2.4.\varepsilon^4} - \frac{1.3}{2.4.6}\frac{A_4}{\varepsilon^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{A_6}{\varepsilon^8} \ldots \right\}_0^{\arccos\frac{a}{x}} \\ J_2 = a^3\varepsilon \left\{ A_{(-4)} \frac{1}{2\varepsilon^2} A_{(-2)} - \frac{A_0}{2.4\varepsilon^4} - \frac{1.3 A_2}{2.4.6\varepsilon^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{A_4}{\varepsilon^8} \ldots \right\}_0^{\arccos\frac{a}{x}} \end{cases}$$

erhalten wird.

Durch Vereinigung von $J_1$ und $J_2$ folgt:

$$T = k a \left\{ \begin{array}{l} a^2 \left[ A_{(-4)}\varepsilon^3 - A_{(-2)}\frac{\varepsilon}{2} - \frac{A_0}{2.4\,\varepsilon} - \frac{A^2}{\varepsilon^3}\frac{1.3}{2.4.6} - \frac{A_4}{\varepsilon^5}\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdots \right] \\ -b^2 \left[ A_{(-2)}\varepsilon - \frac{A_0}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2} - \frac{A_2}{\varepsilon^3}\frac{1}{2.4} - \frac{A_4}{\varepsilon^5}\cdot\frac{1.3}{1.4.6} - \frac{A_6}{\varepsilon^7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdots \right] \end{array} \right\}^{arco\ \frac{a}{x}}$$

Die Werthe der unbestimmten Coefficienten sind hier folgende:

$$A_{(-4)} = \frac{\sin\varphi}{3\cos^3\varphi} + \frac{2}{3}tg\,\varphi$$

$$A_{(-2)} = tg\,\varphi$$

$$A_0 = \varphi$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi)$$

$$A_4 = \frac{1}{4}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3}{2.4}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi)$$

$$A_6 = \frac{1}{6}\sin\varphi\cos^5\varphi + \frac{5}{4.6}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3.5}{2.4.6}.(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi)$$

$$A_8 = \ldots$$

Wir wollen, da wir nur für ein endliches Stück der Hyperbel ein endliches Trägheitsmoment erhalten können, die Integration bis $x = 2a$ ausdehnen. Hieraus folgt $\varphi = \frac{\pi}{3}$; daher:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2},\quad \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3},\quad tg\,\varphi = \sqrt{3}$$

$$\sin\varphi.\cos\varphi = \left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{3} \quad \Big| \quad \sin\varphi\cos^3\varphi = \left(\frac{1}{2}\right)^4\sqrt{3}$$

etc. . . .

Auf diese Weise gehen die Coefficienten $A_{(-4)}$, $A_{(-2)}$, $A_0$, $A_2$, . . . über in:

$$B_{(-4)} = 2\sqrt{3}$$

$$B_{(-2)} = \sqrt{2}$$

$$B_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$B_4 = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{3}{2.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\sqrt{3} + \frac{3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$B_6 = \left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \frac{5}{4.6}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\sqrt{3} + \frac{3.5}{2.4.6}\frac{\pi}{3}$$

$$B_8 = \ldots$$

und es resultirt als primäres Trägheitsmoment einer Hyperbel zwischen den Grenzen $x = -2a$ und $x = 2a$

$$\ldots T = 4ka \left\{ \begin{array}{l} a^2\left[B_{(-4)}\varepsilon^3 - B_{(-2)}\frac{\varepsilon}{2} - B_0\frac{1}{2.4.\varepsilon} - \frac{B_2}{\varepsilon^3}\frac{1.3}{2.4.6} - \frac{B_4}{\varepsilon^5}\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdots\right] \\ -b^2\left[B_{(-2)}\varepsilon - \frac{B_0}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2} - \frac{B_2}{\varepsilon^3}\cdot\frac{1}{2.4} - \frac{B_4}{\varepsilon^5}\cdot\frac{1.3}{2.4.6} \quad . \quad . \quad . \quad .\right] \end{array} \right\}$$

$$6) \ldots T = k4a \left\{ a^2 M_2 - b^2 N_2 \right\}$$

Der Trägheitsradius wird wie bei der Ellipse erhalten.

$$7) \ldots \varrho^2 = a^2 \cdot \frac{B_{(-4)}\varepsilon^3 - B_{(-2)}\frac{\varepsilon}{2} - \frac{B_0}{\varepsilon}\frac{1}{2.4}\cdots}{B_{(-2)}\varepsilon - \frac{B_0}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2} - \frac{B_0}{\varepsilon^3}\frac{1}{2.4}\cdots} - b^2$$

$$8) \ldots \varrho^2 = a^2 Q_2 - b^2$$

---

Wie überhaupt Ellipse und Hyperbel die grösste Analogie zeigen, so geben auch hier wieder die Trägheitsmomente und Trägheitsradien beider Curven Veranlassung zu einem Vergleich, indem der Unterschied wesentlich in dem Vorzeichen des $b^2$ besteht.

Wenn nämlich das primäre Trägheitsmoment der Ellipse in der Form:

$$T_1 = 4ka\left\{a^2 M_1 + b^2 N_1\right\}$$

dargestellt wird, so kann dasjenige der Hyperbel auf die Gleichung:

$$T_2 = 4ka\left\{a^2 M_2 - b^2 N_2\right\}$$

gebracht werden. Ein Gleiches gilt für die Trägheitsradien. Für die Ellipse ist:

$$\varrho_1^2 = Q_1 + b^2;$$

für die Hyperbel:

$$\varrho_2^2 = Q_2 - b^2.$$

Die Analogie tritt also deutlich vor Augen.

---

## Andere Behandlung der Trägheitsmomente der Ellipse und Hyperbel.

### *Numerische Berechnung.*

Die bei dem Trägheitsmoment der Ellipse und Hyperbel auftretenden Integrale konnten zwar leicht in Reihen entwickelt und integrirt werden, diese Reihen sind aber so wenig convergent, dass, um ein auf 6 Decimalen genaues Resultat zu erhalten, schon eine grosse Anzahl Glieder berechnet werden müsste. Durch entsprechende anderweitige Behandlung lassen sich aber auch für die numerische Berechnung brauchbare Formeln herleiten.

§. 7 a.*).

### *Die Ellipse.*

Für die Ellipse war:

$$T = 4\lambda(b^2 J_1 + \varepsilon^2 J_2)$$

*) cfr. §. 7. Gl. 1—5.

$$J_1 = \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}} \, dx; \quad J_2 = \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}} \, dx$$

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

Wir substituiren:

$$x = a \sin \varphi, \text{ woraus } dx = a \cos \varphi \, d\varphi$$

und erhalten:

$$J_1 = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

$$J_2 = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

oder im Anschluss an die allgemein üblichen Bezeichnungen:

$$J_1 = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi) \, d\varphi \qquad J_2 = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, . \, \Delta(\varphi) \, d\varphi.$$

Es ist nun:

$$J_1 = a \, E\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$J_2 = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta(\varphi)} \, d\varphi - a^3 \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \varphi}{\Delta(\varphi)} \, d\varphi$$

Mit Hilfe der Reduktionsformel:

$$\int \frac{\sin^m \varphi}{\Delta(\varphi)} d\varphi = \frac{\sin^{m-3} \varphi . \cos \varphi \Delta(\varphi) - (m-3) \int \frac{\sin^{m-4} \varphi}{\Delta(\varphi)} . d\varphi + (m-2)(1+\varepsilon^2) \int \frac{\sin^{m-2} \varphi}{\Delta(\varphi)} d\varphi}{(m-1)\varepsilon^2}$$

welche für den speciellen Fall $m=4$ und die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ übergeht in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi}{\Delta(\varphi)}.d\varphi = \frac{1}{3\varepsilon^2}\left\{-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + 2(1+\varepsilon^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi)}.d\varphi\right\}$$

wird allmälig $J_2$ auf die Form:

$$J_2 = \frac{a^3}{2\varepsilon^2}\left\{(1-\varepsilon^2)\,F\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) - (1-2\varepsilon^2)\,E\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

gebracht und durch Vereinigung von $b^2 J_1$ und $\varepsilon^2 J_2$ folgt:

$$T = \frac{4\lambda a}{3}\left\{b^2\,F\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) + (a^2+b^2)\,E\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Die numerische Berechnung gestaltet sich hiernach sehr einfach, indem die Integrale $F(\varepsilon, \frac{\pi}{2})$ und $E(\varepsilon, \frac{\pi}{2})$ leicht durch Interpolation aus den von Legendre berechneten Tafeln der elliptischen Integrale entnommen werden können, folglich die wirkliche Rechnung auf ein Minimum reducirt wird.

Im Anschluss an das bekannte Beispiel seien die Halbaxen der Ellipse: $a=25$; $b=7$ daher:

$$\varepsilon = \frac{24}{25} = 0{,}96$$

und unter der Voraussetzung $\lambda=1$ folgt:

$$T = \frac{4.1.25}{3}.\left\{49.F\left(\frac{24}{25}, \frac{\pi}{2}\right) + 674.E\left(\frac{24}{25}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$49.\ F\left(\frac{24}{25}, \frac{\pi}{2}\right) = 131{,}9639825$$

$$674.\ E\left(\frac{24}{25}, \frac{\pi}{2}\right) = 732{,}3323410$$

$$\left\{\ldots\ldots\right\} = 864{,}2963235$$

$$4.25\left\{\ldots\right\} = 86429{,}63235$$

$$\frac{4.25}{3}\left\{\ldots\right\} = 28809{,}87745.$$

Daher ist das primäre Trägheitsmoment einer Ellipse mit den Halbaxen $a = 25$ $b = 7$:

$$T = 28809{,}87745,$$

wenn die Dichtigkeit gleich 1 gesetzt wird.

## §. 9a.

## *Die Hyperbel.*

Für die Hyperbel war:

$$T = 4\lambda . \left\{ + b^2 J_1 + \varepsilon^2 J_2 \right\}$$

$$J_1 = \int_a^x \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\, dx; \quad J_2 = \int_a^x x^2 \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\, . dx$$

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Durch Einführung des Hilfswinkels $\varphi$

$$x = \frac{a}{\sin\varphi}; \quad dx = -\frac{a \cos\varphi}{\sin^2\varphi} . d\varphi$$

folgt:

$$J_1 = -\frac{a}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{\Delta(\varphi)}{\sin^2\varphi} . d\varphi; \quad J_2 = -\frac{a^3}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{\Delta(\varphi)}{\sin^4\varphi} . dx,$$

woraus durch Multiplikation des Zählers und Nenners beider Integrale mit $\Delta(\varphi)$ erhalten wird:

$$J_1 = -\frac{a}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\, \Delta(\varphi)} + ak \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

$$J_2 = -\frac{a^3}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin^4\varphi\,\Delta(\varphi)} + a^3k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta(\varphi)}$$

und durch Vereinigung von $J_1$ und $J_2$ nach der Gleichung:

$$T = 4\lambda\left\{-b^3 J_1 + \frac{1}{k^3}J_2\right\}$$

ist:

$$T = 4\lambda\left\{-b^3ak\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{a(a^2+b^2)}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta(\varphi)} - \frac{a^3}{k^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin^4\varphi\,\Delta(\varphi)}\right\}$$

Die schon bei der Ellipse angewandte allgemeine Reduktionsformel gibt für $m=0$:

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)\sin^4\varphi} = \left\{-\frac{1}{3}\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\Delta(\varphi) + \frac{2}{3}(1+k^2)\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta(\varphi)} - \frac{k^2}{3}\int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\right\}$$

und für $m=2$

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)\sin^2\varphi} = -ctg\varphi\,.\Delta(\varphi) + \int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int\Delta(\varphi)\,d\varphi.$$

Mit Hilfe dieser beiden Formeln kommt $T$ allmälig auf die Form:

$$T = 4\lambda\left\{\left[\frac{a^3}{3k^3\sin^3\varphi} + \frac{a(a^2-b^2)}{3k}\right]ctg\varphi\,.\Delta(\varphi) + \frac{b^2k}{3a}(b^2-2a^2)\left\{\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{a(b^2-a^2)}{3k}\right\}\Delta(\varphi)\,d$$

Wir setzen die obere Grenze $\varphi = \frac{\pi}{3}$, d. h. wir lassen die betr. Bogen durch die in den Punkten $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ und $x = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$

errichteten Ordinaten begrenzt sein. Der erste Theil des vorstehenden Ausdrucks, nämlich:

$$\left[\frac{a^3}{3k^3 \sin^2\varphi} + \frac{a(a^2-b^2)}{3k}\right] ctg\,\varphi . \Delta(\varphi)$$

wird für die untere Grenze wegen $ctg\frac{\pi}{2} = 0$ selbst zu 0, für die obere dagegen ist er:

$$\frac{1}{18}\left(\frac{(7a^2+b^2)\sqrt{a^2+4b^2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Die beiden Integrale aber werden:

$$\frac{b^2 k(b^2-2a^2)}{3a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

$$= \frac{b^2k(2a^2-b^2)}{3a}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{b^2k(2a^2-b^2)}{3a}\left[F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) - F\left(k,\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

und:

$$\frac{a(b^2-a^2)}{3k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \Delta(\varphi)\,d\varphi =$$

$$\frac{a(a^2-b^2)}{3k}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi)\,d\varphi = \frac{a(a^2-b^2)}{3k}\left[E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) - E\left(k,\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Hieraus folgt:

$$T=4\lambda\left\{\frac{1}{18}\frac{(7a^2+b^2)\sqrt{a^2+4b^2}}{\sqrt{3}}+\frac{b^2k}{3a}(2a^2-b^2)\left[F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-F\left(k,\frac{\pi}{3}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{a(a^2-b^2)}{3k}\left[E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-E\left(k,\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}.$$

Die Halbaxen der Hyperbel seien:

$$a=24 \qquad b=7$$

$$k^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{576}{625}=\frac{24}{25}=0{,}96$$

$$\frac{b^2k}{3a}(2a^2-b^2)=720{,}6266\ldots$$

$$\frac{a(a^2-b^2)}{3k}=4391{,}666\ldots$$

$$F\left(\frac{24}{25},\frac{\pi}{2}\right)=2{,}6931425$$

$$F\left(\frac{24}{25},\frac{\pi}{3}\right)=1,\ 278522$$

$$\text{Differ.}=1{,}4146205$$

$$E\left(\frac{24}{25},\frac{\pi}{2}\right)=1{,}0865465$$

$$E\left(\frac{24}{25},\frac{\pi}{3}\right)=0{,}8832555$$

$$\text{Differ.}=0{,}2032010$$

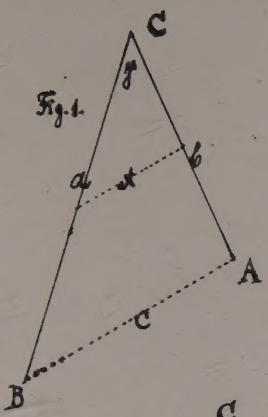
$$\frac{1}{18}\cdot\frac{(7a^2+b^2)\sqrt{a^2+4b^2}}{\sqrt{3}} = \qquad 3764{,}8016$$

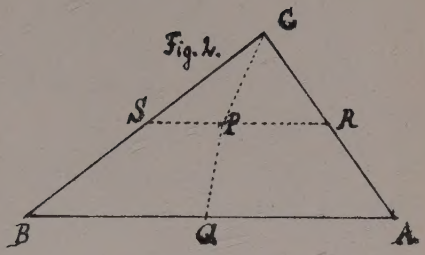
$$\frac{b^2k}{3a}(2a^2-a^2)\left[F\left(\frac{24}{25},\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{24}{25},\frac{\pi}{3}\right)\right] = \underline{1019{,}4133}$$
$$4784{,}2149$$

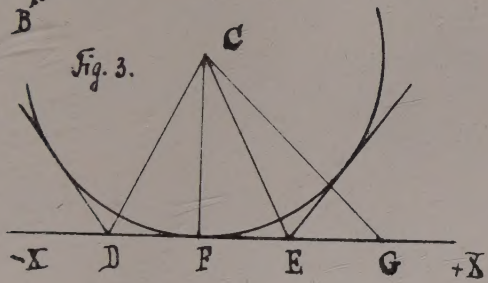
$$\frac{a(a^2-b^2)}{3k}\left[E\left(\frac{24}{25},\frac{\pi}{2}\right)-E\left(\frac{24}{25},\frac{\pi}{3}\right)\right] = \underline{892{,}7862}$$
$$3891{,}4287$$
$$4$$
$$T = 15565{,}7148$$

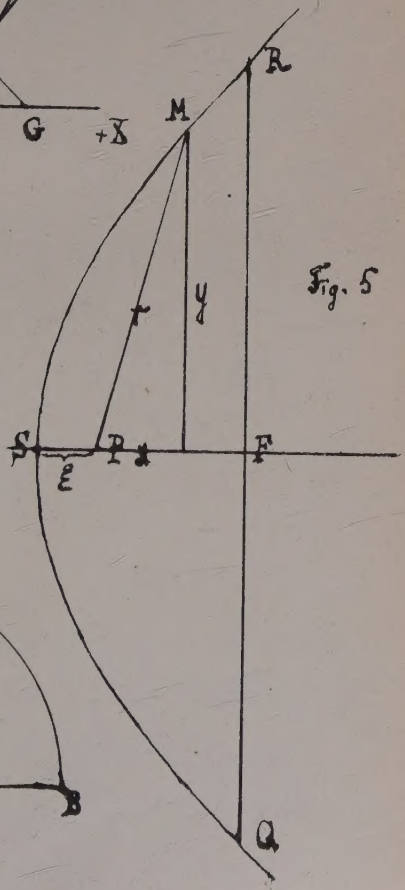
Für den Hyperbelbogen innerhalb der Grenzen $x=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ und $=-\frac{2a}{\sqrt{3}}$ und die Halbaxen $a=24$, $b=7$ ist daher das primäre Trägheitsmoment:

$$T=15565{,}7148.$$


C
Fig. 1.
y
a
x
b
A
c
B


C
Fig. 2.
S
P
R
B
Q
A


C
Fig. 3.
-X
D
F
E
G
+X


R
M
y
r
Fig. 5
S
P
x
F
ε
Q

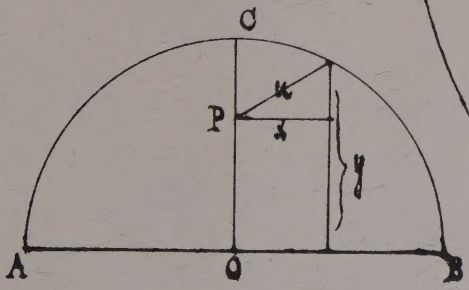


Fig. 4.
C
P
r
x
y
A
Q
B